6. Aufgabenblatt: Analysis 2

Lehrkräfteweiterbildung, 13 Q, 13 R, Winter 2024/25
Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 6.1 Zeigen Sie: für alle $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in I\!R^n$ gilt die *Umgekehrte Dreiecksungleichung*:

$$\big|\, ||\,\bar{x} - \bar{z}|| - ||\,\bar{y} - \bar{z}||\,\big| \;\leq\; ||\,\bar{x} - \bar{y}||$$

Aufgabe 6.2 Sei $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid xy \neq 0\,\}$ und $f : D \longrightarrow I\!R$ die Abbildung

$$f(x,y) \;=\; \frac{x\,y}{|\,x\,y\,|}$$

Zeigen Sie:

1) Die Punkte $\bar{a} = (0,0)$, $\bar{b} = (1,0)$ und $\bar{c} = (0,1)$ liegen im Abschluss $\overline{D}$ von D.
2) Die Grenzwerte von f bei $\bar{a}$, $\bar{b}$ bzw. $\bar{c}$ existieren nicht.

Aufgabe 6.3 Sei $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \;\;y & \text{falls } x \geq 0, \\ -y & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f in den Punkten $\bar{a} = (0,0)$ bzw. $\bar{c} = (0,1)$ stetig ist.

Aufgabe 6.4 Seien $f, g : I\!R^{\,2} \longrightarrow I\!R$ die Funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2/(x^2+y^2) & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$g(x,y) \;=\; y\,f(x,y)\,.$$

Zeigen Sie:

1) f ist in den Punkten $(x,y) \neq (0,0)$ stetig, und im Punkt $(0,0)$ nicht stetig.
2) g ist (in allen Punkten) stetig.